SESSION 2003

Concours d'admission en première année du Cycle de Formation d'Architectes de l'Institut National des Sciences Appliquées de Strasbourg

Épreuves écrites

MATHÉMATIQUES - EXERCICES

Durée : 4 heures - Coefficient : 4

Note : cette épreuve comprend quatre exercices que l'on pourra traiter dans l'ordre de son choix.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus.

Pour tous points M du segment $]BC[$, N du segment $]CA[$ et P du segment $]AB[$, on note $\lambda(M,N,P)$ le périmètre du triangle MNP. L'objet de l'exercice est de déterminer l'existence et l'unicité de trois points M_0, N_0 et P_0 pour lesquels ce périmètre est minimal.

1° Soit M un point fixé sur le segment $]BC[$. Soient M_1 le symétrique de M par rapport à (AB) et M_2 le symétrique de M par rapport à (CA).

i) Montrer que : $M_1M_2 = 2AM\sin(\widehat{BAC})$.

ii) Déterminer les points N' et P' tels que $\lambda(M,N',P')$ soit minimal et préciser la valeur $\Lambda(M)$ de ce minimum.

2° Pour quel point M_0 la valeur $\Lambda(M)$ est-elle minimale ? En déduire les points N_0 et P_0 correspondants. Que représentent ces points pour le triangle ABC ? Conclure.

EXERCICE 2

Soient $(a,b,\lambda)\in \mathrm{R}^3$.

On se propose d'étudier quelques propriétés des suites réelles $(u_n)_{n\in \mathrm{N}}$ définies comme suit :

$$u_0=\lambda,\ \forall n\in \mathrm{N},\ 4u_{n+1}=3u_n^2-2(a+b)u_n+ab+2(a+b).$$

1° On suppose dans cette question que $a=b=0$.

i) Montrer que : $\forall n\in \mathrm{N}^*,\ u_n\geq 0$.

ii) On suppose $\lambda\neq 0$ et l'on définit la suite $(w_n)_{n\in \mathrm{N}^*}$ par :

$$\forall n\in \mathrm{N}^*,\ w_n=\ln(u_n)+\ln(3/4).$$

Calculer w_1 en fonction de λ. Exprimer w_n en fonction de n et de w_1.

iii) Exprimer, pour tout n, $n\in \mathrm{N}^*$, u_n en fonction de n et de λ.

Discuter, selon les valeurs de λ, la convergence de la suite $(u_n)_{n\in \mathrm{N}}$ et préciser alors sa limite.

2° Dans cette question, on suppose que $a=b=2$.

i) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

ii) On suppose que la suite (u_n) est convergente. Montrer que sa limite est égale à 2.

iii) On suppose que $\lambda>2$. Montrer que la suite (u_n) est divergente.

iv) Montrer qu'il existe deux valeurs λ_1 et λ_2, $\lambda_1<\lambda_2$, telles que si $\lambda\in\{\lambda_1,\lambda_2\}$ on a $u_1=2$.

v) On suppose $\lambda_1\leq\lambda\leq\lambda_2$. Montrer que la suite (u_n) converge.

vi) On suppose $\lambda<\lambda_1$. Montrer que la suite (u_n) est divergente.

3° Dans cette partie, on suppose que $a<b<2$.

i) On considère l'application polynôme définie comme suit :

$$\forall x\in \mathrm{R},\ P(x)=3x^2-2(2+a+b)x+ab+2(a+b).$$

Soit Q la primitive de P qui s'annule pour $x=2$. Déterminer Q.
Montrer que Q admet trois racines réelles deux à deux distinctes.

ii) On suppose que la suite (u_n) converge vers une limite L.
Montrer que L vérifie l'une des deux inégalités suivantes :

$$a<L<b \text{ ou } b<L<2.$$

EXERCICE 3

Soit n un entier, $n \geq 2$.
Soit E un espace vectoriel de dimension n sur R.
Soit f un endomorphisme de E dont le rang est égal à r.
On suppose $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

1° Préliminaire.
Montrer que : $0 < r < n$.

2° Montrer que l'image de f est contenue dans le noyau de f.
En déduire que : $2r \leq n$.

3° Soit F un sous-espace supplémentaire du noyau de f, c'est-à-dire que $E = F \oplus \mathrm{Ker} f$.

a) Quelle est la dimension de F ?

b) On suppose que $2r < n$.
Soit $\mathcal{B}$ une base de F. Soit $\mathcal{B}'$ la famille des images par f des vecteurs de $\mathcal{B}$.
i) Montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est une famille libre.
ii) Montrer qu'il existe une famille β de vecteurs du noyau de f telle que la famille $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}' \cup \beta$ soit une base de E.
iii) Déterminer la matrice de f dans la base précédente.

c) Que deviennent les résultats du 3° b) dans le cas où $2r = n$.

4° Application.
On suppose $n = 4$.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base de E est :

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est semblable à la matrice B égale à :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 4

Soit (P) un plan de l'espace.

Dans ce plan, on considère deux points A et B distincts et l'on désigne par a la longueur du segment $[AB]$. Soit (D) une demi-droite d'origine A et orthogonale au plan (P) et soit (Δ) une demi-droite d'origine B et contenue dans le plan (P). Soit (D') la demi-droite d'origine B parallèle à (D) et située du même côté que (D) par rapport au plan (P). On désigne par (Q) le plan déterminé par (Δ) et (D').

Soit M un point de (D). On note x la distance de A à M, soit $x = AM$. De même, soit N un point de (Δ), avec $y = BN$.

1° Faire une figure soignée.

2° Montrer que la sphère de diamètre $[MN]$ passe par A et B et déterminer le rayon de cette sphère.

3° Soit K le milieu du segment $[MN]$ et soit K' (resp. M') la projection orthogonale de K (resp. M) sur le plan (Q).

a) Montrer que K' est le milieu du segment $[NM']$.
Montrer que le vecteur $\overrightarrow{KK'}$ est indépendant de M et N.

b) En déduire l'ensemble des points K', puis l'ensemble des points K dans les deux cas suivants :

i) Les points M et N se déplacent respectivement sur (D) et (Δ) de telle sorte que $x = y$.

ii) Les points M et N se déplacent respectivement sur (D) et (Δ) de telle sorte que la longueur MN reste constante égale à l, $l > a$.